



Fach/Kursbezeichnung MATHEMATIK LK<sub>1</sub> und LK<sub>2</sub>  
 (ggf. Schülergruppe A, B, C ... gem. § 33 (4) APO-GOST und W 33.41)

Vorschlag II / Aufgabe 1), 2) und 3)

Aufgabe 1: Die Funktionenschar  $f_a$  ist gegeben durch  $f_a(x) = \frac{x+a}{x^2}$ ,  $a \in \mathbb{R} \neq 0$

- a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich und die Art der Definitionslücken! Untersuche die Schar  $f_a$  auf sein Verhalten am Rande, Nullstellen, Extrema und Wendestellen! Zeichne die Graphen zu  $f_1$  und  $f_{-1}$ !
- b) Zeige, daß die Graphen zu  $f_{a_1}$  und  $f_{a_2}$  mit  $a_1 \neq a_2$  keine gemeinsamen Punkte haben, sich jedoch für  $x \rightarrow \pm\infty$  beliebig nähern!
- c) Untersuche die Funktionenschar  $g_a$  mit  $g_a(x) = \ln \frac{x+a}{x^2}$  auf maximalen Definitionsbereich, das Verhalten am Rande, die Nullstellen und zeichne den Graphen für  $a=1$ !
- d) Bestimme die Integralfunktion  $\phi(x) = \int_2^x g_a(t) dt$  mit  $a > 0$ ,  $x > 0$ , ohne  $\int \ln x dx$  aus der Formelsammlung zu entnehmen, und berechne das uneigentliche Integral  $\int_2^\infty g_2(t) dt$ !

Aufgabe 2: Gegeben ist die Schar von Funktionen  $f_t$  mit  $f_t(x) = \frac{e^x}{(e^x+t)^2}$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Zeige, daß gilt:  $f_t(\ln t + a) = f_t(\ln t - a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , und erläutere die geometrische Bedeutung dieser Gleichung für den Graphen von  $f_t$ !
- b) Beweise, daß die Differentialgleichung
 
$$f'_t(x) = \frac{t - e^x}{t + e^x} \cdot f_t(x)$$
 für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt ist!
- c) Untersuche die Schar auf das Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ ! Begründe die Existenz eines Extremums über die Monotonieeigenschaften der Schar und gib das Extremum an! Ermittle die Ortslinie  $g$  der Extrempunkte! Skizziere die Graphen zu  $f_t$  mit  $t = \frac{1}{20}$  (berechne dazu noch  $f_t(0)$ ,  $f_t(-1)$ ,  $f_t(-2)$ !) und zu  $g$  in ein Koordinatensystem!
- d) Bestimme die Menge der Stammfunktionen zu  $f_t$ !
- e) Das rechts von der Geraden  $x=a$  mit  $a \geq \ln t$  zwischen dem Graphen von  $f_t$  und der  $x$ -Achse liegende (unendliche) Flächenstück wird durch die Kurve zu  $y = \frac{1}{4} e^{-x}$  in zwei Teile zerlegt. Berechne die Inhalte dieser Teilflächen! Für welche Werte von  $a$  sind beide Teilflächen inhaltsgleich?

\*)Ausfüllung erfolgt gem. den fachspezifischen Regelungen für die Fächer der Oberstufe (Richtlinien, Abschnitt 4.4.3.2)

Aufgabe 3: Gegeben sei die Gleichung  $2tx + \sqrt{1-5t^2}y + tz = 20$ .

- Für welche Werte von  $t$  stellt diese Gleichung eine Ebenenschar  $\mathbb{E}(t)$  in  $\mathbb{R}^3$  dar?
- Weise nach, daß die Ebene  $\mathbb{E}(t)$  und die Kugel  $K_1: \vec{x}^2 = 121$  keine gemeinsamen Punkte haben!
- Eine Kugel  $K_2$  berührt die Kugel  $K_1$  im Punkt  $B(\frac{11}{3}/\frac{22}{3}/\frac{22}{3})$  von Innen. Eine zur Tangentialebene  $\mathbb{E}_B$  in  $B$  parallele Ebene  $\mathbb{E}'_B$  sei Tangentialebene an  $K_2$  und vom Ursprung  $d=1$  L.E. entfernt. Ermittle die Gleichung der Kugel  $K_2$ !
- Bestimme die zur Ebene  $\mathbb{E}(\frac{1}{3})$  parallelen Tangentialebenen  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  an die Kugel  $K_2: [\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}]^2 = 25$  und berechne deren Abstand von  $\mathbb{E}(\frac{1}{3})$ !
- Stelle eine Normalengleichung der Ebene  $\mathbb{E}_1$  auf, die bestimmt ist durch den Richtungsvektor  $\vec{n}_{\mathbb{E}_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  und die Punkte  $P_1(0/-2/0)$  und  $P_2(0/-6/3)$ ! Gib ein Gleichung der Schnittgeraden und die Größe des Schnittwinkels von  $\mathbb{E}_1$  und  $\mathbb{E}(\frac{1}{3})$  an!
- Bestimme Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises der Kugel  $K_1$  mit  $\mathbb{E}_1: -3y - 4z = 6$ !

---

Vorgesehene Hilfsmittel: (Lexika, math. Tafelwerke, Rechner etc.  
Bitte Titel und vorgesehene Ausgabe angeben!)

H. Sieber/H. Huber, Mathem. Begriffe und Formeln  
Formelsammlung A

Taschenrechner (z. B. Casio fx-82 o.ä. nicht  
programmierbare Modelle)

---

Hilfen und Erläuterungen für die/den Schüler/in sowie die nach den Richtlinien vorgesehenen  
Materialien (z. B. Texte) sind der jeweiligen Aufgabe beizufügen.